BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ
№2 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2006

О ГРАНИЧНОМ ФУНКЦИОНАЛЕ ОДНОГО ПОЛУМАРКОВСКОГО ПРОЦЕССА СО СЛУЧАЙНЫМ НАЧАЛЬНЫМ СОСТОЯНИЕМ

Р.Т.АЛИЕВ
Бакинский Государственный Университет

В данной работе исследован граничный функционал – момент попадания одного полумарковского процесса в контрольный уровень s, найдены функция распределения и математическое ожидание, а также получено асимптотическое разложение для математического ожидания, когда начальное состояние процесса является случайной величиной, имеющей гамма распределение с параметрами (α, λ).

1.Введение

Изучение граничного функционала случайных процессов имеет важное прикладное значение. В литературе имеются многочисленные работы по этой тематике. Например, в [2]-[4], [5], [6] и т. д. исследованы граничные функционалы для случайных блужданий и процессов с дискретным вмешательством случая. В данной работе исследуется граничный функционал одного полумарковского процесса.

Пусть $\{\xi_i\}, \{\eta_i\}, \{\zeta_{i-1}\}$, $i = 1,2,...$ – последовательности положительных случайных величин, определенных на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \Im, P)$, причем случайные величины в каждой последовательности независимы и одинаково распределены.

Введем последовательности $\{T_n\}$ и $\{Y_n\}$, $n = 0,1,...$, которые образуют два независимых процесса восстановления:

$$T_0 = Y_0 = 0, \quad T_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i, \quad Y_n = \sum_{i=1}^{n} \eta_i, \quad n = 1,2,.....$$

С их помощью будем определить случайный процесс $X(t) = X(t,\omega)$, $t \geq 0, \omega \in \Omega$.

Определим, так называемый, считающий процесс $\nu(t) = \max\{k \geq 0: T_k \leq t\}$, который означает число скачков процесса $X(t)$ на отрезке [0,t]. Отметим, что процесс $\nu(t)$ остается постоянным на полуинтервалах $[T_n, T_{n+1})$ и непрерывен справа: $\nu(T_n+0)=n$.

Введем также следующие целочисленные случайные величины, которые означают число скачков процесса $X(t)$ до попадания в, так называемый, контрольный уровень s :

$$\nu_0 = 0,\ \ \nu_n = \min\{k \ge \nu_{n-1}+1:\ \zeta_{n-1} - Y_k + Y_{\nu_{n-1}} < s\},\ \ n = 1,2,\ldots .$$

Через τ_n обозначим моменты попадания процесса в контрольный уровень s:

$$\tau_n = T_{\nu_n},\ \ n = 1,2,\ldots .$$

Используя вышевведенные случайные величины, определим исследуемый случайный процесс:

$$X(t) = X_n \quad \text{при} \quad \tau_n \le t < \tau_{n+1},\quad n = 0,1,2,\ldots,$$

где $X_n = \max\{s, \zeta_n - Y_{\nu(t)} + Y_{\nu_n}\}$.

Из определения ясно, что траектории процесса $X(t)$ непрерывны справа и монотонно убывают. Интервалы времени $\xi_{n+1} = T_{n+1} - T_n$ являются интервалами постоянства и интерпретируются как время пребывания процесса $X(t)$ в состоянии X_n, а η_n, $n=1,2,\ldots$ – размеры скачков процесса.

В отличие от ранних работ (напр., [4], [7]) предположим, что начальное состояние процесса является случайной величиной, т.е. $X(0,\omega)=X_0=\zeta_0$, значения которой сосредоточены на полуинтервале $[s,\infty)$.

Введем следующие обозначения:

$$\Phi(t)=P\{\xi_1 \le t\},\quad F(x)=P\{\eta_1 \le x\},\quad \pi(z)=P\{\zeta_n \le z\}\quad t,x,z>0,$$

$$\Phi_n(t)=P\{T_n \le t\},\quad \Delta\Phi_n(t)=\Phi_n(t)-\Phi_{n+1}(t),\quad F_n(x)=P\{Y_n \le x\},\ n=0,1,2,\ldots,$$

$$\Phi_0(x)=F_0(x)=\varepsilon(x),\ \text{где}\ \varepsilon(x)=1\ \text{при}\ x\ge 0\ \text{и}\ \varepsilon(x)=0\ \text{при}\ x<0,$$

$$U_\eta(x)=\sum_{n=0}^{\infty}F_n(x),\quad \varphi(\lambda)=E(e^{-\lambda\eta_1}),\ \lambda>0.$$

2.Функция распределения и математическое ожидание граничного функционала τ_1.

Теорема 2.1. Пусть ξ_1, η_1 и ζ_0 – независимые случайные величины. Тогда функция распределения граничного функционала τ_1 имеет следующий вид:

$$R(t)=1-\sum_{n=0}^{\infty}\Delta\Phi_n(t)\int_0^{\infty}F_n(v)d\pi(v+s)\,. \tag{2.1}$$

Доказательство. Используя формулу полной вероятности и определение процесса $X(t)$, имеем:

$$1-R(t)=\int_s^{\infty}P_z\{\tau_1>t\}d\pi(z)=\int_s^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}P_z\{\nu(t)=n;\ \tau_1>t\}d\pi(z)=$$

$$=\int_s^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}P_z\{\,\nu(t)=n;\ \mathrm{T}_{\nu_1}>t\,\}d\pi(z)=\int_s^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}P_z\{T_n\le t<T_{n+1};T_{\nu_1}>t\}d\pi(z)$$

$$=\int_s^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}P_z\{T_n\le t<T_{n+1};\nu_1\ge n+1\}d\pi(z)=\int_s^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}P\{T_n\le t<T_{n+1};z-Y_n\ge s\}d\pi(z)=$$

$$=\int_s^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\Delta\Phi_n(t)F_n(z-s)d\pi(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\Delta\Phi_n(t)\int_0^{\infty}F_n(v)d\pi(v+s)\,. \tag{2.2}$$

Отметим, что перемена порядка интегрирования и суммирования в (2.2) законна, так как

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left|\Delta\Phi_n(t)F_n(z-s)\right|\le\lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N}\left|\Phi_n(t)-\Phi_{n+1}(t)\right|=1-\lim_{N\to\infty}\Phi_N(t)\le 1.$$

Этим теорема 2.1 доказана.

Теорема 2.2. Пусть ξ_1,η_1 и ζ_0 – независимые между собой случайные величины, $E\xi_1=e_1<\infty$ и $E\zeta_0<\infty$. Тогда математическое ожидание граничного функционала τ_1 имеет следующий вид:

$$E\tau_1=e_1E[U_\eta(\zeta_0)]\,. \tag{2.3}$$

Доказательство. Применим преобразование Лапласа к обеим частям выражения (2.2):

$$\int_0^{\infty}e^{-\lambda t}(1-R(t))dt=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{\infty}e^{-\lambda t}\Delta\Phi_n(t)dt\int_0^{\infty}F_n(v)d\pi(v+s)=$$

$$=\frac{1-\varphi(\lambda)}{\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\varphi^n(\lambda)\int_0^{\infty}F_n(v)d\pi(v+s)\,. \tag{2.4}$$

Учитывая, что

$$\lim_{\lambda\to 0}\frac{1-\varphi(\lambda)}{\lambda}=\lim_{\lambda\to 0}[\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{\lambda}\int_0^\infty e^{-\lambda t}d\Phi(t)]=\lim_{\lambda\to 0}\int_0^\infty e^{-\lambda t}(1-\Phi(t))dt=E\xi_1=e_1,$$

получим математическое ожидание граничного функционала τ_1:

$$E\tau_1=\lim_{\lambda\to 0}\int_0^\infty e^{-\lambda t}(1-R(t))dt=e_1\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^\infty F_n(v)d\pi(v+s)=e_1\int_0^\infty U_\eta(v)d\pi(v+s)=$$

$$=e_1\int_s^\infty U_\eta(z-s)d\pi(z)=e_1E[U_\eta(\zeta_0)].$$

Этим теорема 2.2 доказана.

3. Асимптотическое разложение для математического ожидания τ_1.

В этом разделе будем получать асимптотическое разложение для $E\tau_1$ в случае, когда ζ_0-s имеет гамма распределение на $[0,\infty)$ с параметрами (α,λ), $\alpha>0$, $\lambda>0$, а ξ_1 и η_1 имеют произвольные распределения.

Сначала докажем следующую вспомогательную лемму:

Лемма 3.1. Пусть $\lim_{x\to\infty}g(x)=0$ и $\max_{[0,b]}|g(x)|=h<\infty$. Тогда для любого $\alpha>0$

$$\lim_{\lambda\to 0}\int_0^\infty t^{\alpha-1}\cdot e^{-t}\cdot g(\frac{t}{\lambda})dt=0. \tag{3.1}$$

Доказательство. Из условия леммы следует, что для любого $\varepsilon>0$ существует такое $m(\varepsilon)>0$, что для произвольного $x>m(\varepsilon)$ имеет место: $|g(x)|<\varepsilon$. Возьмем число $b=b(\varepsilon)>0$, такое, что $\int_0^b t^{\alpha-1}e^{-t}dt<\varepsilon$. Условия леммы обеспечивают выполнение $\lim_{\varepsilon\to 0}\mathrm{b}(\varepsilon)=0$. Тогда для любого $\lambda<\dfrac{b}{m(\varepsilon)}$:

$$\left|\int_0^\infty t^{\alpha-1}e^{-t}g(\frac{t}{\lambda})dt\right|\le\int_0^b t^\alpha e^{-t}\left|g(\frac{t}{\lambda})\right|dt+\int_b^\infty t^\alpha e^{-t}\left|g(\frac{t}{\lambda})\right|dt\le$$

$$\le\max_{[0,b]}|g(x)|\int_0^b t^{\alpha-1}e^{-t}dt+\varepsilon\int_b^\infty t^{\alpha-1}e^{-t}dt\le\varepsilon h+\varepsilon\int_0^\infty t^{\alpha-1}e^{-t}dt=\varepsilon(h+\Gamma(\alpha)).$$

Из произвольности числа $\varepsilon>0$ и конечности h, получаем утверждение леммы 3.1.

Сформулируем основной результат этого раздела в виде следующей теоремы:

Теорема 3.1. Пусть выполнены условия теоремы 2.2, случайная величина η_1 имеет абсолютно непрерывное распределение, $m_2 = E\eta_1^2 < \infty$, а $\zeta_0 - s$ имеет гамма распределение с параметрами (α, λ), $\alpha > 0$, $\lambda > 0$. Тогда математическое ожидание граничного функционала τ_1 имеет следующее асимптотическое разложение:

$$E\tau_1 = \frac{e_1}{m_1}\frac{\alpha}{\lambda} + \frac{e_1 m_2}{2m_1^2} + o(1) \quad \text{при } \lambda \to 0. \tag{3.2}$$

Доказательство. Как известно [1], если $m_2 = E\eta_1^2 < \infty$, то при $x \to +\infty$ функция восстановления $U_\eta(x)$ имеет следующее асимптотическое разложение:

$$U_\eta(x) = \frac{x}{m_1} + \frac{\sigma^2 + m_1^2}{2m_1^2} + g(x), \tag{3.3}$$

где $m_1 = E\eta_1$, $\sigma^2 = D\eta_1$ и $g(x) = o(1)$ при $x \to +\infty$.

Учитывая (3.3), имеем:

$$E(U_\eta(\zeta_0)) = \int_s^\infty U_\eta(z-s)d\pi(z) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-\lambda x}U_\eta(x)dx =$$

$$= \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\left[\frac{1}{m_1}\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\lambda^{\alpha+1}} + \frac{m_2}{2m_1^2}\frac{\Gamma(\alpha)}{\lambda^\alpha}\right] + J(\alpha,\lambda) =$$

$$= \frac{1}{m_1}\frac{\alpha}{\lambda} + \frac{m_2}{2m_1^2} + J(\alpha,\lambda) \quad \text{при } \lambda \to 0, \tag{3.4}$$

где $J(\alpha,\lambda) = \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\displaystyle\int_0^\infty t^{\alpha-1} \cdot e^{-t} \cdot g\left(\frac{t}{\lambda}\right)dt.$

Так как $g(x) = o(1)$ при $x \to \infty$ и $U_\eta(x)$ является конечной и непрерывной функцией на $[0,\infty)$ и локально ограничена, т.е. ограничена на каждом конечном отрезке $[0,b]$, то $g(x)=U_\eta(x)-\frac{x}{m_1}-\frac{\sigma^2+m_1^2}{2m_1^2}$ также является локально ограниченной. Таким образом, применяя лемму 3.1, имеем:

$$J(\alpha,\lambda)=o(1) \text{ при } \lambda\to 0 . \tag{3.5}$$

Учитывая (3.5) и (3.4), из (3.2) имеем:

$$E\tau_1=\frac{e_1}{m_1}\frac{\alpha}{\lambda}+\frac{e_1m_2}{2m_1^2}+o(1) \quad \text{при } \lambda\to 0 .$$

Этим теорема 3.1 доказана.

Автор благодарен профессору КТУ (Турция) Т.А.Ханиеву за постановку задачи и полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. т.II, Мир, 1984, 752 с.
2. Alsmeyer G. On generalized renewal measures and certain passage times. The Annals of Probability, 1992, №3, p.1229-1247.
3. Рагимов Ф.Г. Асимптотическое разложение распределения времени пересечения нелинейных границ. Теория вероятностей и ее применения. 1992, т. 37, №3 , с.580-584.
4. Алиев Р.Т. О граничном функционале одного полумарковского процесса с дискретным вмешательством случая. Известия АН Азербайджана, серия физ-тех. и мат. наук, 1997, т.15, № 1-3, с.102-107.
5. Lotov V.I. On some boundary crossing problems for Gaussian random walks. The Annals of Probability, 1996, №4 , p. 2154-2171.
6. Khaniyev T.A., Özdemir H., Maden S. Calculating the probability characteristics of a boundary functional of a semi-continuous random process with reflecting and delaying screens. Applied Stochastic Models and Data Analysis, 1998, v.14, N.1, p. 117-123.
7. Насирова Т.И., Япар Дж., Ханиев Т.А. О вероятностных характеристиках уровня запаса в модели типа (s,S). Кибернетика и системный анализ, 1998, № 5, с. 69-76.

TƏSADÜFİ BAŞLANĞIC VƏZİYYƏTLİ BİR SEMİMARKOV PROSESİNİN SƏRHƏD FUNKSİONALININ TƏDQİQİ

R.T.ƏLİYEV

XÜLASƏ

Məqalədə təsadüfi başlanğıc vəziyyətli bir semimarkov prosesinin sərhəd funksionalının paylanma funksiyası, riyazi gözləməsi, həmçinin

prosesin başlanğıc vəziyyəti qamma paylanmaya maliк təsadüfi кəmiyyət olduqda riyazi gözləmə üçün asimptotiк ayrılış tapılmışdır.

INVESTIGATION OF BOUNDARY FUNCTIONAL OF THE SEMI-MARKOVIAN PROCESS WITH RANDOM INITIAL STATE

R.T.ALIYEV

SUMMARY

In this study the boundary functional of the semi-markovian process is investigated, the distribution function, mathematical expectation is found, asymptotic expansion for the mathematical expectation, when an initial state of process is a random variable with a gamma distribution is obtained.